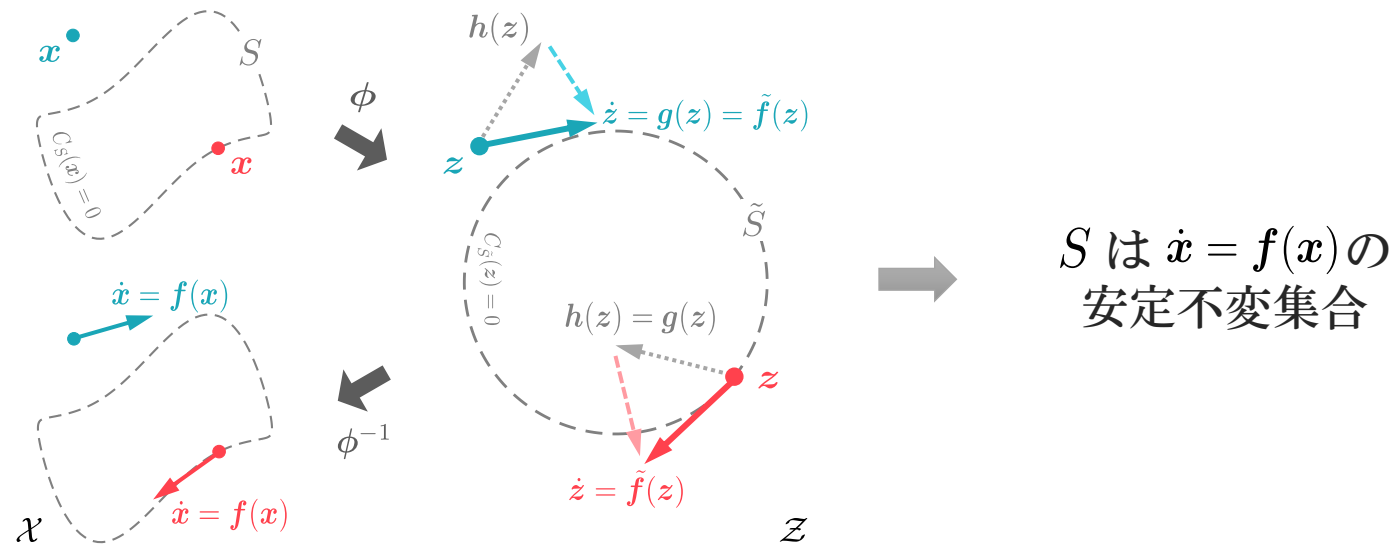


# 54

## 安定不変集合をもつ力学系の学習

arXiv: 2006.08935 <https://arxiv.org/abs/2006.08935>



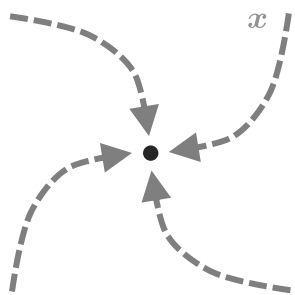
$S$  は  $\dot{x} = f(x)$  の  
安定不変集合

武石直也 (西スイス応用科学大学/理研AIP), 河原吉伸(九州大学/理研AIP)

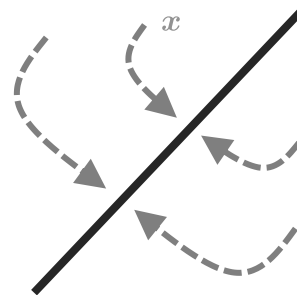
2020/11/24 @ IBIS2020

# 背景 安定な力学系の機械学習

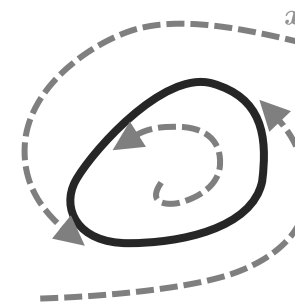
- 系列データ  $(\mathbf{x}_{t_1}, \mathbf{x}_{t_2}, \dots, \mathbf{x}_{t_m})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$  から力学系  $\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x})$  を学習したい
  - ▶ 特に、 $\mathbf{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$  がニューラルネットの場合 cf. neural ODEs [Chen+ 2018]
- 学習した力学系モデルが **(漸近) 安定** であってほしい場合がある
  - ▶ 対象の系に関する科学的・工学的な事前知識がある場合
  - ▶ 例 自励振動する系 → 安定なリミットサイクルをもつはず



漸近安定な平衡点



平衡点の集合

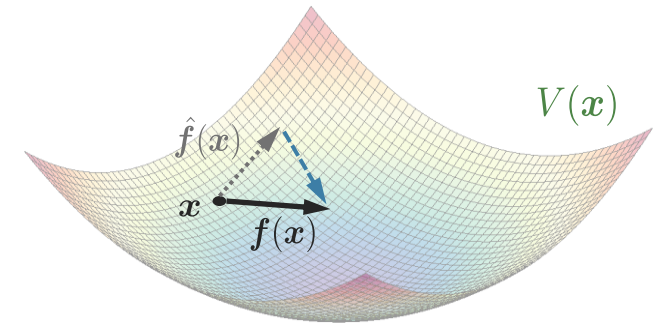


安定リミットサイクル

# 既存手法 安定な平衡点 [Manek & Kolter 2019]

- 元となる力学系モデル  $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$
- このモデルを平衡点  $\mathbf{x} = 0$  について漸近安定にしたい

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \frac{\nabla V(\mathbf{x})^\top \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})}{\|\nabla V(\mathbf{x})\|_2^2} \nabla V(\mathbf{x}), & \text{if } \nabla V(\mathbf{x})^\top \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) > 0, \\ \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$



- $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  は学習可能なリアプノフ（候補）関数
  - input-convex NN [Amos+ 2017] でおく
  - $V(\mathbf{x} = 0) = 0, V(\mathbf{x} \neq 0) > 0$  であるようにする
- 一般の安定不変集合（例 リミットサイクル）を扱えない ☹

# 提案手法 一般の安定不変集合

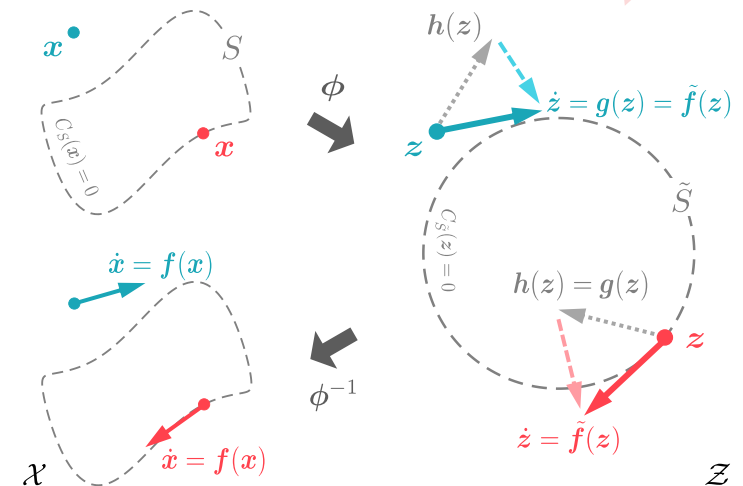
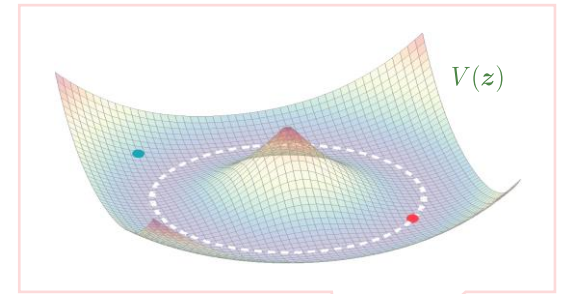
- $\dot{x} = f(x)$  が集合  $S \subset \mathcal{X}$  を安定不変集合としてもつようにしたい
  - 安定不変集合の具体的な形は自明でないので、 $S$  も同時に学習する

## 提案モデル

[入力]  $x \in \mathcal{X}$

1.  $x$  から潜在表現  $z \in \mathcal{Z}$  への NN による可逆変換  $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$
2.  $\mathcal{Z}$  における何らかの集合  $\tilde{S} \in \mathcal{Z}$  を考えて、リアプノフ候補関数  $V$  を NN でおく (右図上)
3.  $\mathcal{Z}$  での力学系モデル  $\dot{z} = h(z)$  を、 $\tilde{S}$  が安定不変集合になるように修正 (右図下)
4.  $\phi^{-1}: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$  によって元の状態空間  $\mathcal{X}$  にもどす

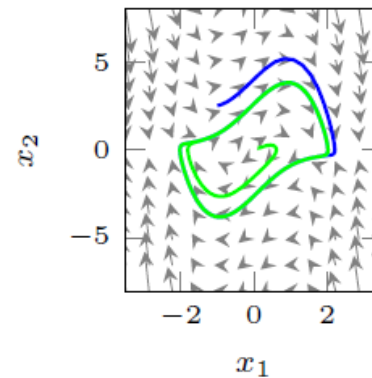
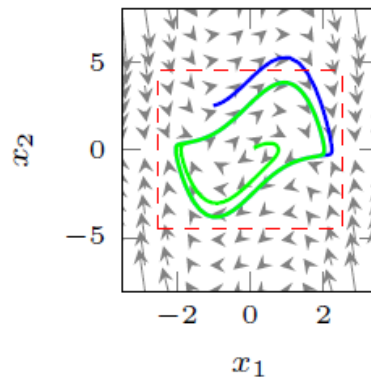
[出力]  $\dot{x}$



# 実験 ① 1/2

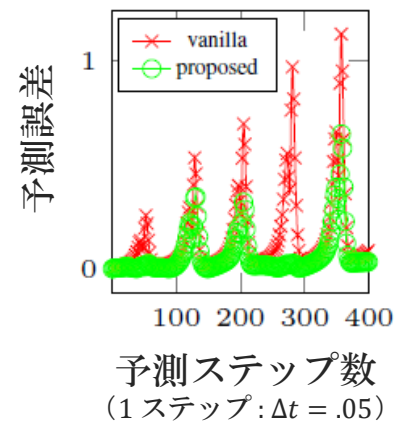
非線形振動子から生成したデータ  
(赤点線の領域のみを訓練に使用)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$



提案モデル  
( $\tilde{S} \in \mathcal{Z}$ を単位円とした場合)  
からの予測

→ ベクトル場  $f(x)$     — — 軌跡①、②



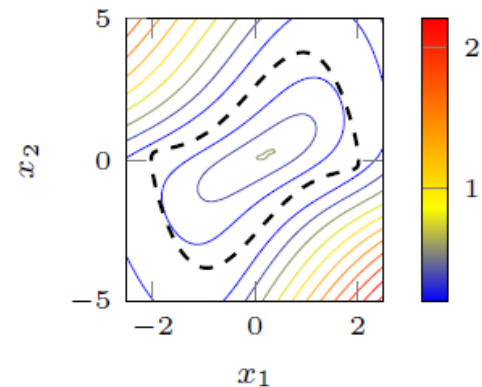
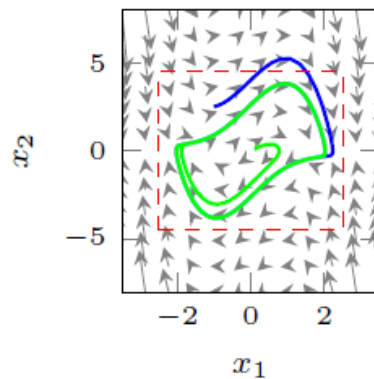
長期予測誤差の比較

- × neural ODE  
(安定不変集合の保証なし)
- 提案モデル  
(保証された安定不変集合)

# 実験 ① 2/2

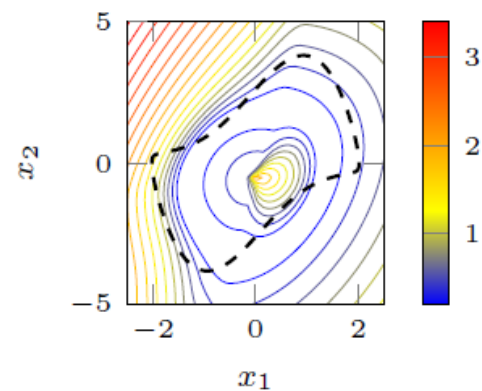
非線形振動子から生成したデータ  
(赤点線の領域のみを訓練に使用)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$



提案モデルで  
学習された  $V(x)$

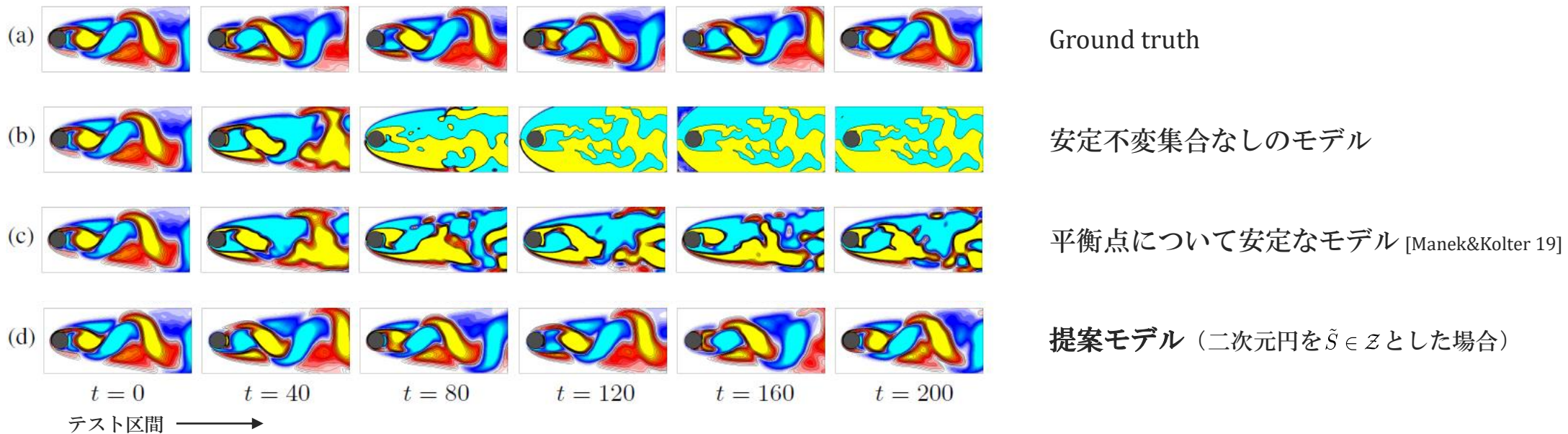
--- 真のリミットサイクル



$\phi$ なしのモデルで  
学習された  $V(x)$

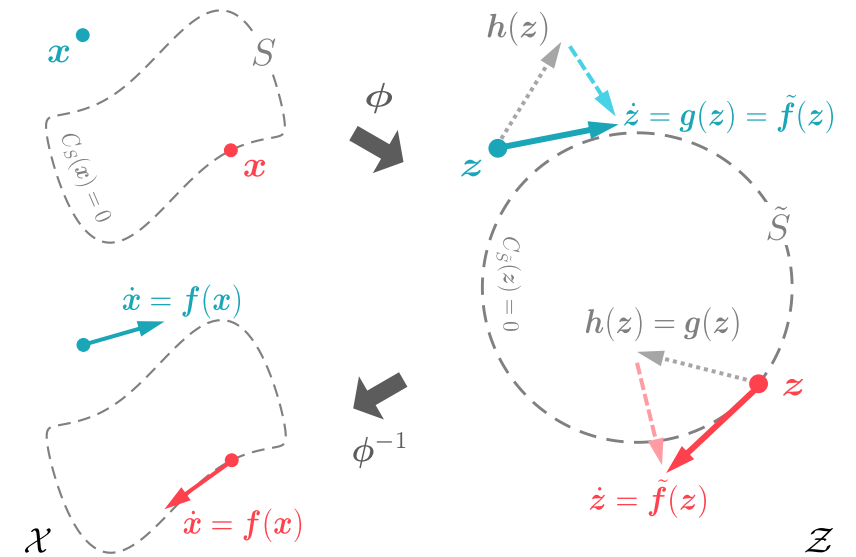
# 実験 ②

- 円柱まわりの二次元流体場
  - 一定のレイノルズ数以上でカルマン渦列が発生（リミットサイクル）
- リミットサイクル到達前（赤）のデータで訓練して、到達後（青）を長期予測



# まとめ

- 安定不変集合をもつ力学系モデルの学習
  - 特にニューラルネットによるモデル
  - 対象の系に関する事前知識として安定不変集合の性質がわかる場合がある
  - 意味のある長期予測にも重要
- 既存手法は平衡点の安定性しか扱えない
- 提案手法は任意の安定不変集合を扱える



Preprint Takeishi and Kawahara, Learning dynamics models with stable invariant sets, arXiv: 2006.08935.  
<https://arxiv.org/abs/2006.08935>